تصحيح الامتحان الوطني للرياضيات 2014 – شعبة العلوم التجريبية-

من انجاز : أمين كويزين

للاعلام بخطأ ما المرجو ترك رسالة على البريد الالكتروني Aminegoui@gmail.com

التمرين الأول (03)

$A(0,3,1)$ و $B(-1,3,0)$ و $C(0,5,0)$

1] أ- لدينا :

$\rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

إذن :

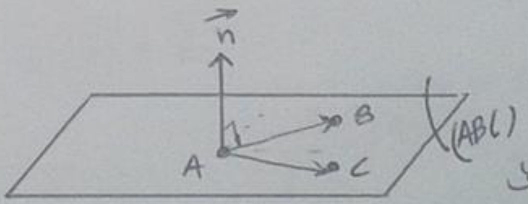
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

أي :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}}$$

* بما أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ إذن المستقيمان (AB) و (AC) غير متوازيان ومنه النقط A , B و C غير مستقيمية

ب-



نعتبر $\vec{n}$ الموجهة المنظمية للمستوى (ABC).

و $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

نعتبر $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ نقطة من الفضاء ,

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y-3\\z-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - (y-3) - 2(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 3 - 2z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2z - y + 5 = 0$$

إذن :

$$\boxed{2x - y - 2z + 5 = 0 : (ABC)}$$

2) أ- لدينا معادلة الفلكة :

$$x^2+y^2+z^2-4x-5=0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + y^2 + z^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 9$$

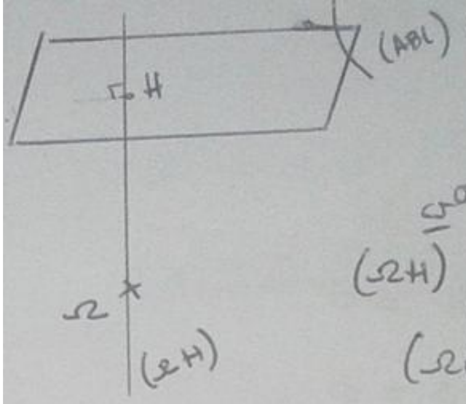
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 3^2.$$

ومنه (S) فلكة شعاعها $R=3$ و مركزها $\Omega\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

ب- لنحسب المسافة بين Ω و (ABC) :

$$d(\Omega,(ABC)) = \frac{|2\times2+0+0+5|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 = R$$

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S).



ج - لنحدد التمثيل البارامتري للمستقيم (ΩH) :

لدينا $\vec{n}$ منظمية على (ABC) إذن فهي متجهة موجهة للمستقيم (ΩH)

إذن لكل $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ من المستقيم (ΩH) يوجد $t \in \mathbb{R}$ بحيث : $\overrightarrow{\Omega M} = t.\vec{n}$.

أي :

$$\begin{pmatrix}x-2\\y-0\\z-0\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x-2=2t\\y=-t\\z=-2t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2+2t\\y=-t\\z=-2t\end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}.$$

$$H\begin{pmatrix}x_H\\y_H\\z_H\end{pmatrix} \in (S)\cap(ABC) \Leftrightarrow \begin{cases}x_H=2+2t\\y_H=-t\\z_H=-2t\\2x_H-y_H-2z_H+5=0 \quad (*)\end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow 2\times(2+2t)+t+4t+5=0$$

$$\Rightarrow 4+4t+t+4t+5=0 \Rightarrow 9t+9=0$$

$$\Rightarrow \boxed{t=-1}$$

ومنه

$$\begin{cases}x_H=0\\y_H=1\\z_H=2\end{cases}$$

أي أن : $\boxed{H(0,1,2).}$

التمرين الثاني (3ن)

[1

$$z^2 - \sqrt{2}\,z + 2 = 0$$

$$\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 = 2 - 8 = -6 = (i\sqrt{6})^2$$

$$\to z_1 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\to z_2 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

[2

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i.$$

أ-

$$* \quad |u| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}}.$$

أي

$$\boxed{|u| = \sqrt{2}}$$

$$* \quad u = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\,i\right) = |u| \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= |u|\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

ومنه

$$\boxed{\arg(u) = \frac{\pi}{3}}$$

ب- لدينا:

$$u = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

إذن

$$u^6 = (\sqrt{2})^6 \cdot e^{i\,6\frac{\pi}{3}} = 8\,e^{i2\pi}$$

$$= 8\left(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\right) = 8 \Rightarrow \boxed{u^6 = 8 \in \mathbb{R}}$$

[3

$A(4-4i\sqrt{3})$ و $B(8)$.

أ-

$z'-0 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-0)$

إذن:

$\boxed{z' = z \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}}$

ب- لدينا:

$\rightarrow z_B = 8$

و

$\rightarrow z_A e^{i\frac{\pi}{3}} = (4-4i\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2 + 2i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} + 6$

$= 8$

أي أن

$\boxed{z_B = z_A e^{i\frac{\pi}{3}}}$

ومنه B هي صورة A بالدوران R.

+ استنتاج:

لدينا:

$\rightarrow |a| = \sqrt{16+16\times 3} = \sqrt{64} = 8$

$\rightarrow |b| = 8$

إذن $OA = OB$.

وبما أن

$(\widehat{\vec{OA};\vec{OB}}) = \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$

إذن نستنتج أن المثلث OAB متساوي الأضلاع

التمرين الثالث (3ن) :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7 . \end{cases}$$

1] من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 13 < 14$

نفترض أن $u_n < 14$ لكل n من $\mathbb{N}$

ولنبين أن $u_{n+1} < 14$ لكل n من $\mathbb{N}$:

لدينا : $u_n < 14$

إذن : $\frac{u_n}{2} < 7$

أي : $\frac{u_n}{2} + 7 < 14$

ومنه : $u_{n+1} < 14$

إذن نستنتج أن

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : u_n < 14}$$

2] أ- $v_n = 14 - u_n$.

بما أن $v_n = 14 - u_n$ لا تنعدم على $\mathbb{N}$

(لأن $14 - u_n > 0$)

$$\rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{14 - u_{n+1}}{14 - u_n} = \frac{14 - \frac{1}{2}u_n - 7}{14 - u_n} = \frac{7 - \frac{1}{2}u_n}{14 - u_n}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{14 - u_n}{14 - u_n} = \frac{1}{2}$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

* v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

اذن

$$\boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ب- لدينا $u_n = 14 - v_n$ اذن

$$\boxed{u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

النهاية : (لأن : $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$)

$$\boxed{\lim u_n = 14}$$

ج- من أجل $u_n > 13,99$:

أي :

$$14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 13,99$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n > -0,01$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,01$$

$$e^{n\ln\left(\frac{1}{2}\right)} < 0,01 \Rightarrow e^{-n\ln(2)} < 0,01$$

$$\Rightarrow -n\ln(2) < \ln(0,01) \Rightarrow n\ln(2) > -\ln(0,01)$$

$$\Rightarrow n > -\frac{\ln(0,01)}{\ln(2)} \Rightarrow n > 6,64$$

وبما أن n عدد صحيح طبيعي نأخذ $\boxed{n = 7}$

التمرين الرابع (03 ن):

1) الحدث A: "مجموع العددين اللذين تحملان البيدقتين المسحوبتين يساوي 1".

$$Card(\omega) = C_9^2 = 36$$

$$P(A) = \frac{C_5^1 \cdot C_4^1}{C_9^2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

2) الحدث B:

أ- $P(B) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

ب- يعيد التجربة 3 مرات احتمال فوزه مرتين

$$C_3^2 \times P^2(B) \times (1 - P(B))$$

$$= 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)$$

$$= \frac{5}{72}.$$

المسألة (8ن) :

[I

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x) \qquad \forall x \in]0,+\infty[.$$

(1

$$\forall x \in]0,+\infty[: \quad g'(x) = \frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}}$$

* بما أن $x>0$ إذن $\frac{1}{x}>0$ و $\frac{2}{x^3}>0$ أي $\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}>0$

ومنه $g'(x)>0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

وبالتالي g تزايدية قطعاً على المجال $]0,+\infty[$.

(2

$\rightarrow g(1) = 1 - \frac{1}{1} + \ln(1) = 1-1 = 0$

جدول تغيرات g:

x	0		1		$+\infty$
g'	$\Vert$		$+$		
g	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

حسب جدول التغيرات نستنتج أن:

* $\forall x \in]0,1] : \quad g(x) \leqslant 0$

* $\forall x \in [1,+\infty[: \quad g(x) \geqslant 0.$

$$f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in]0,+\infty[.$$ II

(1

$$* \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

اذن (C) يقبل محور الأراتيب كمقارب

بجوار 0^+

ب- (2

$$* \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+\ln(x))^2}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+2\ln(x)+\ln^2(x)}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln^2(x)}{x}\right]$$

ونعلم أن لكل $n \in \mathbb{N}$ $\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n(x)}{x} = 0\right)$

ومنه

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+\ln(x))^2}{x}\right] = 0}$$

$$* \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+\ln(x))^2}{x} + \frac{1}{x^3}\right] = 0$$

ج- لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 0$$

اذن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور

الأفاصيل بجوار $+\infty$.

ملاحظة : 2- أ :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2) أ- لكل x من $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = 2\times\frac{1}{x}(1+\ln x) - \frac{2}{x^3}$$

$$= \frac{2}{x} + 2\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x^3}$$

$$= \frac{2}{x}\left(1+\ln(x) - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{x}\cdot g(x)}$$

← على المجال $]0,1]$: لدينا $g(x)\leqslant 0$ و $x>0$ اذن

$f'(x)\leqslant 0$ ومنه f تناقصية.

← على المجال $[1,+\infty[$: لدينا $g(x)\geqslant 0$ و $x>0$ اذن

$f'(x)\geqslant 0$ ومنه f تزايدية.

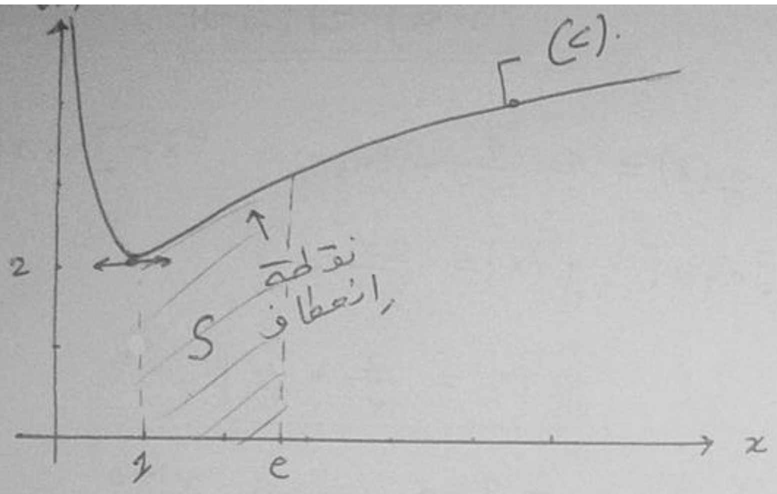
ب- جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

حسب جدول التغيرات نستنتج أن لكل x من $]0,+\infty[$

لدينا : $f(x)\geqslant 2$.

(4



(5

أ- لدينا $H'(x) = \ln(x) + 1$

ومنه H دالة أصلية لـ $\ln(x) + 1$

$$\rightarrow I = \int_1^e (1+\ln(x))\,dx = \Big[x\ln x\Big]_1^e = e\ln e - 0$$

$$\boxed{I = e}$$

ب-

$$\rightarrow J = \int_1^e (1+\ln x)^2\,dx$$

نضع :

$$\begin{cases} U = (1+\ln x)^2 \\ V' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 2\cdot\frac{1}{x}(1+\ln x) \\ V = x. \end{cases}$$

إذن :

$$J = \Big[x(1+\ln x)^2\Big]_1^e - 2\int_1^e (1+\ln x)\,dx$$

$$= e(1+1)^2 - 1 - 2I$$

$$= 4e - 1 - 2e = 2e - 1$$

أي

$$\boxed{J = 2e - 1}$$

$$S = \int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e f(x)\,dx$$

$$= \int_1^e \left[(1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2} \right] dx$$

$$= J + \int_1^e \frac{dx}{x^2}$$

$$= J + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e$$

$$= 2e - 1 - \left(\frac{1}{e} - 1 \right)$$

$$= 2e - \frac{1}{e} .$$

$$\boxed{S = 5{,}06\ cm^2}$$